

Ansätze zur modellprädiktiven Regelung der longitudinalen Strahldynamik in Synchrotronen

Towards Model Predictive Control of Longitudinal Beam Dynamics in Synchrotrons

Dieter Lens^{*1}, Timm Faulwasser^{†2} und Christopher M. Kellett^{‡3}

¹GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung, 64291 Darmstadt.

²Laboratoire d'Automatique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, Schweiz und Institut für Angewandte Informatik, Karlsruher Institut für Technologie, Karlsruhe.

³School of Electrical Engineering and Computer Science, University of Newcastle, Callaghan NSW 2308, Australien.

23. Juli 2015

Kurzfassung: Die Stabilisierung der longitudinalen Strahldynamik in Hadronensynchrotronen ist ein anspruchsvolles Regelungsproblem, da die erforderlichen Abtastzeiten des Regelkreises im Bereich von wenigen Mikrosekunden bis hin zu einigen hundert Nanosekunden liegen. In diesem Beitrag wird untersucht, ob modellprädiktive Verfahren für die Regelung der longitudinalen Strahldynamik eingesetzt werden können. Durch eine geeignete Problemformulierung und effiziente numerische Algorithmen kann das Optimierungsproblem hinreichend schnell auf einem High-End-FPGA gelöst werden. Simulationen für das Synchrotron SIS18 verdeutlichen, dass deutliche Performanzgewinne erreicht werden können.

Abstract: Hadron synchrotrons accelerate protons and heavy ions to very high energies. The stabilization of the longitudinal beam dynamics in these particle accelerators is a demanding control problem since typical sample times of the beam-feedback loop are on the order of several μs to several hundred ns. This work examines if model predictive control is a suitable candidate for longitudinal beam feedback in synchrotrons. We show that, by combining an appropriate problem formulation with efficient numerical algorithms, the optimization problem can be solved sufficiently fast on a high-end FPGA. Realistic simulations for the synchrotron SIS18 of the GSI Helmholtz Center for Heavy-Ion Research illustrate that the proposed control scheme can lead to a significant improvement of the control performance.

Stichwörter: Modellprädiktive Regelung, Hadronensynchrotrone, feldprogrammierbarer Logikbaustein, Regelung der longitudinalen Strahldynamik

Keywords: Model Predictive Control, Hadron Synchrotrons, Field Programmable Gate Array, Longitudinal Beam Feedback

1 Einleitung

Teilchenbeschleuniger wie Synchrotrone werden für vielfältige Forschungszwecke genutzt. Die Einsatzgebiete reichen von der Kern- und Plasmaphysik über die Materialforschung bis hin zu medizinischen Anwendungen wie Tumortherapien mit Protonen und Schwerionen. Im Wesentlichen wird in einem Synchrotron eine große Anzahl geladener Teilchen auf hohe kinetische Energien beschleunigt. Damit der Teilchenstrahl beschleunigt werden kann, muss zunächst ein sogenannter Einfang durchgeführt werden, d.h. eine Hochfrequenzspannung (HF-Spannung) wird hochgefahren und es bilden sich mehrere so genannte Teilchenhaufen (engl. particle bunches). Bedingt durch die inhärent nichtlineare und schnelle Dynamik der Teilchenhaufen stellt der Betrieb von

*d.e.m.lens@gsi.de

†timm.faulwasser@epfl.ch, timm.faulwasser@kit.edu

‡chris.kellett@newcastle.edu.au, CK wird unterstützt durch den Australian Research Council unter dem Förderkennzeichen FT1101000746. Diese Arbeit wurde teilweise unterstützt durch die Alexander von Humboldt-Stiftung.

Teilchenbeschleunigern spannende regelungstechnische Herausforderungen. Dazu gehören zum Beispiel die Stabilisierung der transversalen und der longitudinalen Dynamik der Teilchenhaufen, die Regelung von Amplitude und Phase der HF-Spannung und die Regelung der Eigenfrequenz der Kavitäten, welche die HF-Spannung erzeugen.

In diesem Beitrag wird im Rahmen einer Machbarkeitsstudie untersucht, ob modellprädiktive Regelungsverfahren (engl. model predictive control, MPC) auf das Problem der Stabilisierung der longitudinalen Dynamik des Teilchenstrahles in Synchrotronen angewendet werden können. Da Synchrotrone in der Regel in Forschungsinstituten für spezifische Zwecke entworfen und gebaut werden, gibt es kaum zwei Maschinen, die identisch sind. Wir betrachten für diese Arbeit das Schwerionensynchrotron SIS18, welches Teil der Beschleunigeranlage des GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung in Darmstadt ist [1]. Eine der großen Herausforderungen für die Anwendung von MPC bei dieser Anlage ist die erforderliche Abtastfrequenz in der Größenordnung von 100–1000 kHz. Allerdings steht an der GSI eine dedizierte Hardware zur Verfügung, welche die Implementierung von Regelalgorithmen auf einem digitalen Logikbaustein (engl. field programmable gate array, FPGA) erlaubt. Im Rahmen einer laufenden Modernisierung und Erweiterung der Beschleunigeranlage in Darmstadt, werden in Zukunft auch leistungsfähige High-End-FPGAs für die Strahlregelung zur Verfügung stehen. Der vorliegende Beitrag verfolgt zwei parallele Anliegen: Zum einen sollen die spezifischen Herausforderungen der Regelung der longitudinalen Strahldynamik skizziert werden. Zum anderen soll in Form einer Machbarkeitsstudie aufgezeigt werden, dass state-of-the-art MPC zur Regelung sehr schneller dynamischer Vorgänge im SIS18-Beschleuniger geeignet ist.

Für die Strahlregelung in Hadronensynchrotronen (dies sind Synchrotrone zur Beschleunigung von Protonen und Schwerionen) wurden bisher ausschließlich analoge und digitale Filter oder PI-Regler, d.h. vergleichsweise einfache Regelungsverfahren, eingesetzt [2–4]. Die Untersuchung eines modellprädiktiven Ansatzes in dieser Arbeit wird zum einen durch eine mögliche Verbesserung der Regelgüte motiviert. Eine bessere Regelung hat eine bessere Strahlqualität und damit bessere Bedingungen für Experimente zur Folge. Zum anderen spielen Stellbegrenzungen bei der Strahlregelung eine Rolle, da die zur Regelung benötigten Hochfrequenzanlagen je nach erforderlicher Leistung einen signifikanten Kostenfaktor des Beschleunigers darstellen. In [5] wird das Synchrotron SIS18 als Beispielsystem für den Entwurf einer robusten Zustandsrückführung verwendet, es werden jedoch weder Implementierungsaspekte diskutiert noch wird die benötigte Rechenzeit analysiert. Da die Abtastfrequenz für die longitudinale Strahlregelung des SIS18 typischerweise bei 375 kHz liegt, ist ein Schwerpunkt der vorliegenden Arbeit die Diskussion von Implementierungsaspekten.

Der Beitrag ist wie folgt gegliedert: Abschnitt 2 führt in die longitudinale Strahldynamik ein, beschreibt die Auswirkungen einer typischen Störsequenz und fasst die Modellierung der Dynamik des Teilchenhaufens zusammen. Abschnitt 3 beschreibt den modellprädiktiven Ansatz und geht auf Implementierungsaspekte des Algorithmus ein. Abschnitt 4 präsentiert schließlich Simulationsergebnisse.

Notation

Positive Definitheit und positive Semi-Definitheit einer Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ werden mit $Q \succ 0$ bzw. $Q \succeq 0$ gekennzeichnet. Die Euklidische Norm von $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ wird als $\|x\|$ geschrieben und es gilt $\|x\|_Q^2 = x^T Q x$ mit $Q \succeq 0$. Eine Zahlenfolge $u(0), u(1), \dots, u(i), \dots, u(N-1)$ wird geschrieben als $\{u(i)\}_N$ und $u(i)$ ist das Element dieser Folge mit Index i . Die Heaviside-Funktion wird mit $\Theta(t)$ bezeichnet. Die Dimension des Vektors $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ wird mit n_u gekennzeichnet.

2 Longitudinale Strahldynamik

2.1 Nichtlineare Einzelteilchendynamik

Synchrotrone sind Ringbeschleuniger mit einem geschlossenen Referenzorbit [6]. Abbildung 1 zeigt den vereinfachten Aufbau: Magnetfelder von Dipolmagneten krümmen die Teilchenbahn, Quadrupolmagnete sorgen für die Fokussierung in transversaler Richtung. Der Strahl besteht aus einem oder mehreren Teilchenpaketen, die innerhalb des Strahlrohrs umlaufen. Mindestens eine Beschleunigungskavität erzeugt eine Hochfrequenz-Spannung (HF) und sorgt damit für die longitudinale Fokussierung und Beschleunigung, d.h. in Ausbreitungsrichtung. Im Folgenden wird lediglich die longitudinale Bewegung betrachtet.

Bezüglich der Modellierung werden folgende Annahmen getroffen, welche auch in [3, 7] verwendet werden:

- (i) homogener Teilchenstrahl bestehend aus Ionen eines bestimmten Typs (Protonen oder schwerere Ionen),
- (ii) näherungsweise Entkopplung von transversaler und longitudinaler Dynamik,
- (iii) Modulation der HF-Spannung in Phase und Amplitude,
- (iv) Modellierung von Wechselwirkungen des Strahls mit seiner Umgebung als externe Störgrößen,

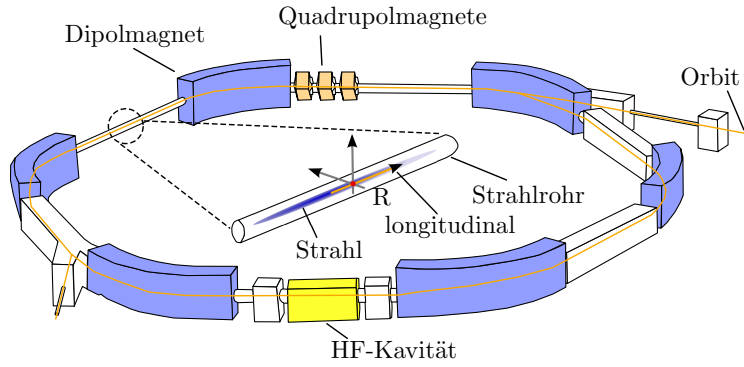


Abbildung 1: Vereinfachter Aufbau eines Synchrotrons.

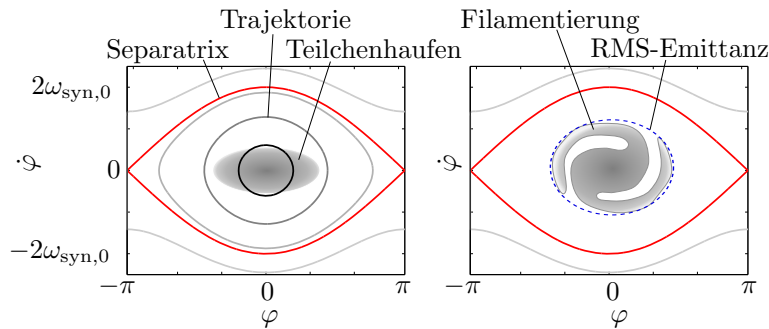


Abbildung 2: Teilchentrajektorien im longitudinalen Phasenraum (links), Emittanzaufweitung (rechts).

(v) konstante Strahlenergie.

Die erste Annahme schließt Elektronenstrahlen aus, welche ein deutlich anderes dynamisches Verhalten aufweisen. Die zweite Annahme der Entkopplung ist in der Regel für Synchrotrone erfüllt. Eine konstante Strahlenergie ist beispielsweise in Speicherringen gegeben. Diese Annahme vereinfacht die nachfolgenden Betrachtungen, eine Erweiterung auf den beschleunigten Fall ist allerdings denkbar. Mit den obigen Annahmen kann die longitudinale Einzelteilchendynamik [6] durch

$$\ddot{\varphi}_j(t) = -\omega_{\text{syn},0}^2(\delta_1) \cdot (1 + u_2(t)) \sin(\varphi_j(t) - u_1(t) + \delta_2(t)) \quad (1)$$

beschrieben werden, wobei $j = 1, \dots, N_p$ der Teilchenindex ist und φ_j die Positions- bzw. Phasenabweichung des Teilchens bezüglich der in Abb. 1 dargestellten Referenz R beschreibt. Diese Referenz kann als Solltrajektorie mit der idealen Position und Geschwindigkeit angesehen werden. Zu jedem im Ring zirkulierenden Teilchenhaufen gibt es eine spezifische Referenz. Der Einfachheit halber werden wir uns im Folgenden auf den Fall beschränken, dass nur ein Teilchenhaufen im Ring zirkuliert.¹ Die Phasen- und Amplitudenmodulationen u_1 und u_2 werden als Stellgrößen verwendet, um die Strahldynamik zu regeln. Sie unterliegen den Beschränkungen

$$\forall t : u_1(t) \in [-\bar{u}_1, \bar{u}_1], u_2(t) \in [-\bar{u}_2, \bar{u}_2]. \quad (2)$$

Die Partikeldynamik (1) wird nicht nur durch die Stellgrößen $u_{1,2}$ sondern auch durch die Störgrößen δ_1 und δ_2 beeinflusst. Die Störgröße δ_2 modelliert Störungen bzw. Anregungen der Strahlphase, sie wirkt auf alle Teilchen gleichermaßen.

Einige Trajektorien in der Phasenebene $(\varphi, \dot{\varphi})$ sind in Abb. 2 dargestellt. Teilchen in der Nähe des Ursprungs oszillieren um diesen mit der Synchrotronfrequenz

$$\omega_{\text{syn},0}(\delta_1) = \frac{2\pi}{T_R} \sqrt{\frac{hQ[\gamma_R^{-2} - \gamma_{\text{tr}}^{-2}]}{2\pi\beta_R^2 W_R}} \sqrt{(1 + \delta_1)\hat{V}}. \quad (3)$$

Die Synchrotronfrequenz hängt zum einen von diversen Parametern ab, welche in Tabelle 1 in Anhang A aufgelistet sind. Zum anderen wird $\omega_{\text{syn},0}(\delta_1)$ auch von der Störgröße δ_1 beeinflusst. Diese Größe beschreibt

¹Dies deckt auch den Fall ab, dass mehrere Pakete im Ring gleichförmig schwingen.

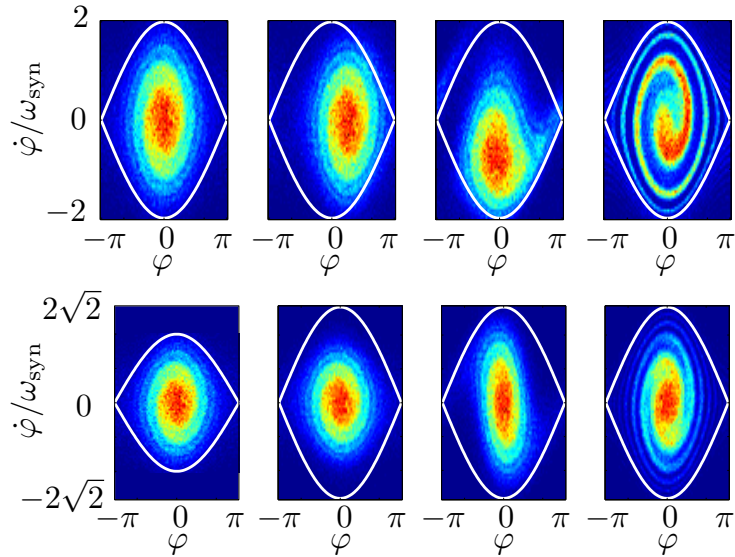


Abbildung 3: Oben: Phasenstörung bei $k = t/T_{\text{samp}} = 175$, von links nach rechts $k \in \{1, 176, 220, 1200\}$; unten: Amplitudenstörung bei $k = 175$, $k \in \{1, 176, 200, 800\}$.

Schwankungen der Spannungsamplitude \hat{V} . Mit Hilfe der Störgröße δ_1 können Oszillationen der Strahlänge angeregt werden.

Anhand von Abb. 2 lässt sich eine wichtige Anforderung an die Regelung der longitudinalen Strahldynamik verdeutlichen: Bewegt sich ein Teilchen des Strahls in der φ - $\dot{\varphi}$ -Ebene nach außen, so nimmt die Synchrotronfrequenz ab. In der Nähe der sogenannten Separatrix (vgl. Abb. 2) strebt die Synchrotronfrequenz gegen 0. Diese Frequenzstreuung der Teilchen sorgt ursächlich für eine Filamentierung des Strahls. Die Filamentierung wird in Simulationen und Messungen sichtbar, wenn die Form des Teilchenhaufens nicht dem Verlauf der Trajektorien entspricht, dies ist auf der rechten Seite in Abb. 2 dargestellt. Durch diese Filamentierung nimmt die effektive Strahlfläche in der Phasenebene, die sogenannte Emittanz, zu. Das maßgebliche Ziel der Regelung ist es, der Zunahme der effektiven Strahlfläche bzw. der Zunahme der Emittanz durch Stabilisierung des Partikelhaufens in der φ - $\dot{\varphi}$ -Ebene entgegenzuwirken.

2.2 Dynamik der Strahlform

Die Lösung dieser Regelungsaufgabe hängt jedoch weniger von der Dynamik eines einzelnen Teilchens als vielmehr von der Dynamik des Teilchenhaufens ab. Um die zeitliche Veränderung der Form des Teilchenhaufens in der φ - $\dot{\varphi}$ -Ebene zu beschreiben, wird in [7] ein statistischer Ansatz vorgestellt, der die folgenden Momente betrachtet: die Mittelwerte

$$\rho_\varphi = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \varphi_j, \quad \rho_{\dot{\varphi}} = \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} \dot{\varphi}_j, \quad (4)$$

und die Momente zweiter Ordnung (Varianzen und Kovarianz)

$$\begin{aligned} \mu_\varphi &= \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (\varphi_j - \rho_\varphi)^2, \\ \mu_{\varphi, \dot{\varphi}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (\varphi_j - \rho_\varphi)(\dot{\varphi}_j - \rho_{\dot{\varphi}}), \\ \mu_{\dot{\varphi}} &= \frac{1}{N_p} \sum_{j=1}^{N_p} (\dot{\varphi}_j - \rho_{\dot{\varphi}})^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Die Momente einer stationären Verteilung sind offensichtlich ebenfalls stationär. Mit Hilfe dieser Momente wird die RMS-Emittanz (engl. root mean square emittance) definiert als [8]

$$\varepsilon_{\varphi, \dot{\varphi}} = \sqrt{\mu_\varphi \mu_{\dot{\varphi}} - \mu_{\varphi, \dot{\varphi}}^2}. \quad (6)$$

Ist die vom Strahl in der φ - $\dot{\varphi}$ -Ebene bedeckte Fläche eine Ellipse, so entspricht $\pi \varepsilon_{\varphi, \dot{\varphi}}$ gerade der Fläche dieser Ellipse, d.h. die RMS-Emittanz ist ein Maß für die Strahlfläche in φ - $\dot{\varphi}$ -Koordinaten.

Um den zu entwerfenden MPC-Regler mit existierenden Reglern vergleichen zu können, betrachten wir zuerst zwei typische Störsequenzen in Simulation und ohne Regelung. Simuliert wurde Dynamik (1) mit einer

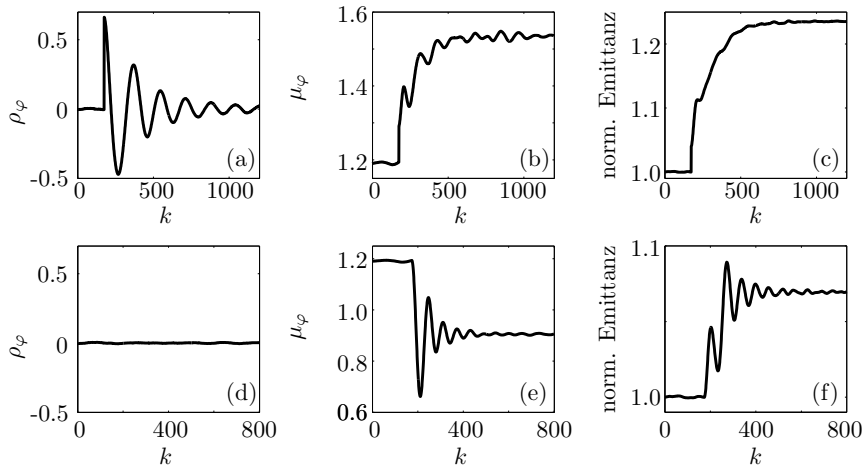


Abbildung 4: Momente und normierte Emittanz $\varepsilon_{\varphi,\dot{\varphi}}(k)/\varepsilon_{\varphi,\dot{\varphi}}(0)$ für die Phasenstörung (a, b, c) und die Amplitudenstörung (d, e, f), offener Regelkreis.

stationären normalverteilten Anfangsverteilung von etwa $2,5 \cdot 10^5$ Teilchen. Die feste Schrittweite der Simulation ist $k = t/T_{\text{samp}}$ und stimmt mit der Abtastzeit $T_{\text{samp}} = 2.66 \mu\text{s}$ der digitalen Hardware des SIS18 überein. Die Simulationsergebnisse für die betrachteten Störsequenzen und ohne Regelung, d.h. mit $u_{1,2}(k) = 0$, sind in Abb. 3 dargestellt. Die erste Sequenz (Abb. 3, oben) ist eine Störung der Strahlphase mit $\delta_1(k) = 0$ und $\delta_2(k) = 0,8 \cdot \Theta(k - k_\delta)$, $k_\delta = 175$. Durch diese Störung wird der Teilchenhaufen zum Zeitpunkt $k = 175$ sprunghaft in Richtung der Koordinate φ verschoben. Dadurch werden Schwingungen der Strahlphase ρ_φ angeregt, siehe Abb. 4 (oben). Nach der Störung beginnt die Filamentierung, wodurch die Strahlänge μ_φ und die Emittanz zunehmen.

Die zweite Sequenz (Abb. 3, unten) ist eine Störung der Strahlänge mit $\delta_1(k) = \Theta(k - k_\delta)$ and $\delta_2(k) = 0$. Dies entspricht einem Anstieg der Spannungsamplitude von 5 kV auf 10 kV, so dass nach (3) die Synchrotronfrequenz um den Faktor $\sqrt{1 + \delta_1} = \sqrt{2}$ ansteigt. Die Höhe der Separatrix in der φ - $\dot{\varphi}$ -Ebene ändert sich um den gleichen Faktor. Bei dieser Störung wird die Strahlphase ρ_φ nicht wesentlich angeregt (vgl. Abb. 4, unten) und die Strahlänge μ_φ oszilliert um eine neue, kleinere Ruhelage. Durch Filamentierung nimmt die Emittanz ebenfalls zu. Theoretisch ist die neue Ruhelage von μ_φ um einen Faktor $1/\sqrt{1 + \delta_1}$ kleiner im Vergleich zum Wert vor der Störung. Durch die Filamentation fällt der stationäre Wert von μ_φ am Ende der Simulation allerdings auch hier etwas höher aus. Es ist zu beachten, dass, um der Vergleichbarkeit der Ergebnisse willen, allen Simulationen in dieser Arbeit die gleiche Anfangsverteilung zugrunde liegt.

Wie oben erwähnt, ist das Ziel der Regelung die Strahlqualität zu erhöhen, indem der Filamentierung entgegen gewirkt wird bzw. die Emittanz minimiert wird. Die Filamentierung ist allerdings ein hochgradig nichtlinearer Effekt. Der Emittanzanstieg kann praktisch nicht analytisch berechnet werden, so dass man auf Simulationen oder Messungen angewiesen ist. Da der Emittanzverlauf durch ein einfaches Modell nicht zuverlässig vorhergesagt werden kann und nicht in Echtzeit als Messung zur Verfügung steht, wird oft ein indirekter Zugang gewählt: Durch die Detektion und die rasche Dämpfung von Oszillationen sowohl der Strahlphase ρ_φ als auch der Strahlänge μ_φ soll der Emittanzanstieg verringert werden. Das endgültige Regelziel ist somit die Stabilisierung der Momente um ihre Ruhelage, dabei ist die Ruhelage von μ_φ aufgrund von Störungen und Filamentierung nicht exakt im Voraus bestimmbar. Da die Emittanz aber a posteriori aus Simulationsergebnissen berechnet werden kann, wird diese Größe zur Bewertung der Regelgüte herangezogen.

2.3 Linearisiertes Reglerentwurfsmodell

Für den Entwurf des MPC-Reglers wird ein Modell benötigt, welches die Dynamik der Momente (4) und (5) beschreibt. In Abgrenzung zur Einzelteilchendynamik (1) wird diese im Folgenden als aggregierte Dynamik bezeichnet. Ein vereinfachtes Modell der aggregierten Dynamik wurde in [7] hergeleitet und in [9] mit Hinblick auf die Anwendung von MPC weiterentwickelt. An dieser Stelle soll das prinzipielle Vorgehen der Modellierung kurz skizziert werden. Zunächst wird eine polynomiale Näherung endlicher Ordnung p der Einzelteilchendynamik (1) gewählt. Diese erlaubt es, die Ableitungen erster Ordnung der Momente (4) und (5) als nichtlineare Funktionen dieser Momente und der Momente höherer Ordnung analytisch mit Hilfe eines Computeralgebrasystems zu berechnen. Um diese Funktionen weiter vereinfachen zu können, wird eine Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gewählt, mit deren Hilfe sich die Teilchendichte des Pakets in der Phasenebene näherungsweise beschreiben

lässt.² Dies ermöglicht die Bestimmung höherer Momente (Ordnung drei und höher) als analytische Funktionen der Momente (4) und (5). Die Verwendung dieser Funktionen in den bereits erwähnten Ableitungen erster Ordnung liefert schließlich ein nichtlineares Differentialgleichungssystem fünfter Ordnung in den Zustandsgrößen (4) und (5). Da dieses System für die weitere Verwendung zu komplex ist, wird eine Linearisierung um eine stationäre Ruhelage des nichtlinearen Systems durchgeführt. Diese Ruhelage lässt sich wie folgt charakterisieren: Für die Mittelwerte gilt $\rho_\varphi = \bar{\rho}_\varphi = 0$ und $\rho_{\dot{\varphi}} = \bar{\rho}_{\dot{\varphi}} = 0$, d.h. für die Ruhelage liegt das Teilchenpaket zentriert im Phasenraum. Für die Kovarianz gilt darüber hinaus $\mu_{\varphi,\dot{\varphi}} = \bar{\mu}_{\varphi,\dot{\varphi}} = 0$, während sich die Varianz $\mu_{\dot{\varphi}} = \bar{\mu}_{\dot{\varphi}}$ als Funktion der Varianz $\mu_\varphi = \bar{\mu}_\varphi$ ausdrücken lässt. Damit kann die Ruhelage durch einen einzigen Freiheitsgrad $\mu_\varphi = \bar{\mu}_\varphi$ parametrisiert werden:

$$\bar{\rho}_\varphi = \bar{\rho}_{\dot{\varphi}} = \bar{\mu}_{\varphi,\dot{\varphi}} = 0, \quad \bar{\mu}_{\dot{\varphi}} = a_1 \omega_{\text{syn},0}^2 \bar{\mu}_\varphi. \quad (7)$$

Der Koeffizient a_1 ist eine Funktion von $\bar{\mu}_\varphi$, hierauf wird im Folgenden noch eingegangen. Gleichung (7) beschreibt eine Schar von Ruhelagen. Für ein konkretes $\bar{\mu}_\varphi$ erhält man eine stationäre Verteilung, für die keine Strahloszillationen auftreten. Mit Hilfe des Parameters $\bar{\mu}_\varphi$ kann die Größe des Teilchenpakets variiert werden. Es lässt sich zeigen, dass das linearisierte Modell eine Erhaltungsgröße enthält, so dass eine Reduktion auf ein System vierter Ordnung durchgeführt werden kann [9]. Der Zustandsvektor $x = (x_1, \dots, x_4)^T$ des reduzierten Systems wird wie folgt gewählt:

$$x_1 = \rho_\varphi, \quad x_2 = \rho_{\dot{\varphi}}, \quad x_3 = \mu_\varphi - \bar{\mu}_\varphi, \quad x_4 = \mu_{\varphi,\dot{\varphi}}. \quad (8)$$

Die Modellgleichungen des reduzierten Systems lauten

$$\dot{x} = \omega_{\text{syn},0} \left(\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \right), \quad x(0) = x_0 \quad (9a)$$

mit

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ a_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ a_2 + \frac{a_3}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9b)$$

und

$$b_1 = (0, -a_1)^T, \quad b_2 = (0, a_1 \bar{\mu}_\varphi)^T. \quad (9c)$$

Man beachte, dass in (9a), und daher auch für den Reglerentwurf, der nominale Wert der Synchrotronfrequenz $\omega_{\text{syn},0}$, d.h. $\delta_1 = 0$ in (3), verwendet wird. Die Stellgrößen unterliegen den Beschränkungen (2). Die Koeffizienten des Modells sind Funktionen des (nur ungenau bekannten) Arbeitspunkts $\bar{\mu}_\varphi$:

$$a_1 = 1 + \sum_{n=1}^6 \frac{(-1)^n}{n! 2^n} \bar{\mu}_\varphi^n, \quad a_2 = 1 + \sum_{n=1}^6 \frac{(-1)^n (n+1)}{n! 2^n} \bar{\mu}_\varphi^n, \quad (10a)$$

$$a_3 = 2a_1, \quad (10b)$$

Die Summation über $n = 1, \dots, 6$ ergibt sich dabei durch die konkrete Wahl der Polynomordnung p , welche zur Vereinfachung der Einzelteilchendynamik verwendet wird [7].

Der Einfachheit halber soll der MPC-Regler zeitdiskret entworfen werden. Eine Diskretisierung von (9) mit Halteglied nullter Ordnung führt formal auf

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad x(0) = x_0. \quad (11)$$

Eine möglichst schnelle Überführung in die Ruhelage $x = 0$ ist das Ziel der Regelung. Für diese Aufgabenstellung existieren in der Literatur zahlreiche Methoden und Regelungsverfahren. Der Vergleich mit diesen Alternativen geht jedoch über den Rahmen dieses Beitrags hinaus. Stattdessen geht es im Folgenden darum, eine modellprädiktive Regelungsstrategie als potentiellen aussichtsreichen Kandidaten unter praktischen Gesichtspunkten zu evaluieren.

Messgrößen

Nicht alle Zustände dieses Systems sind direkt messbar. Vielmehr steht für die Strahlregelung das analoge Messsignal einer Strahlsonde (engl. fast current transformer, FCT) zur Verfügung. Diese Sonde liefert eine zum Strahlstrom proportionale Spannung und liefert so Informationen über das longitudinale Profil des Strahls. Nach

²Für das Synchrotron SIS18 wurden gute Ergebnisse mit Normalverteilungen erzielt.

einer analogen Vorverarbeitung und einer Diskretisierung wird, relativ zur Phase der Kavitätenspannung, die Strahlphase

$$y_1(k) = \rho_\varphi(k - \delta_m) - u_1(k - \delta_m) = x_1(k - \delta_m) - u_1(k - \delta_m), \quad (12a)$$

und zusätzlich die Strahlamplitude

$$I_1(k) = K_{\text{FCT}} I_{\text{DC}} e^{-\mu_\varphi(k)/2}$$

ermittelt. Die Dämpfung K_{FCT} des Signalpfades ab der Sonde ist prinzipiell hinreichend genau bekannt, dies gilt jedoch nicht für den mittleren Strahlstrom I_{DC} , welcher von Beschleunigungszyklus zu Beschleunigungszyklus gewissen Schwankungen unterliegt und derzeit messtechnisch nicht zur Laufzeit im Regelsystem zur Verfügung steht. Um bei der Diskretisierung durch den Analog-Digital-Wandler (ADC) eine möglichst gute Auflösung des Signals $I_1(k)$ zu erzielen, wird eine automatische Verstärkungsregelung (engl. automatic gain control, AGC) eingesetzt. Dies bedeutet, dass eine Normierung des Strahlsignals $I_1(k)$ auf seine Ruhelage

$$\bar{I}_1 = K_{\text{FCT}} I_{\text{DC}} e^{-\bar{\mu}_\varphi/2}$$

durchgeführt wird. Als Sensorinformation steht somit $I_1(k)/\bar{I}_1$ zur Verfügung. Da wegen (8) außerdem

$$2 \ln \left((I_1(k)/\bar{I}_1)^{-1} \right) = \mu_\varphi(k) - \bar{\mu}_\varphi = x_3(k).$$

gilt, ist die Wahl $y_2(k) = 2 \ln (\bar{I}_1/I_1(k)) = x_3(k)$ als zweite Ausgangsgleichung naheliegend. Allerdings kann \bar{I}_1 durch die AGC nur näherungsweise bestimmt werden. Dies wird durch den Fehlerterm $\Delta\bar{I}_1(k)$ modelliert: Die fehlerbehaftete Sensorinformation ist nun $I_1(k)/\bar{I}_{\text{AGC}}$ mit $\bar{I}_{\text{AGC}} = \bar{I}_1 + \Delta\bar{I}_1(k)$. Für die zweite Ausgangsgleichung ergibt sich damit in linearer Näherung

$$\begin{aligned} y_2(k) &= 2 \ln \left(\left(\frac{I_1(k - \delta_m)}{\bar{I}_1 + \Delta\bar{I}_1(k)} \right)^{-1} \right) \\ &\approx \underbrace{2 \ln \left((I_1(k - \delta_m)/\bar{I}_1)^{-1} \right)}_{=x_3(k-\delta_m)} + \underbrace{2 \Delta\bar{I}_1(k - \delta_m)/\bar{I}_1}_{:=d(k-\delta_m)} \end{aligned} \quad (12b)$$

mit dem unbekanntem additiven Messfehler $d(k - \delta_m)$. Man beachte, dass in den Messgleichungen (12) eine Signalverzögerung δ_m auftritt. Diese Signalverzögerung ist konstant und kann mit Hilfe von Pufferspeichern kompensiert werden [9, 10]. Aus Platzgründen verzichten wir hier jedoch auf eine detaillierte Diskussion dieses Aspektes und setzen $\delta_m = 0$. Die Werte $y_1(k)$ stehen als Sensordaten direkt zur Verfügung. Die Werte $y_2(k)$ können mit Hilfe von Gl. (12b) aus den Sensordaten $I_1(k)/\bar{I}_{\text{AGC}}$ berechnet werden.³

Um eine echtzeitfähige Implementierung von (12b), d.h. der Berechnung der Werte $y_2(k)$ zu ermöglichen, wird die Reihenentwicklung

$$y_2(k) = 2 \ln (I_{\text{sensor},2}^{-1}) \approx 2(I_{\text{sensor},2}^{-1} - 1) - (I_{\text{sensor},2}^{-1} - 1)^2$$

unter Verwendung der Sensordaten $I_{\text{sensor},2} = I_1(k - \delta_m)/\bar{I}_{\text{AGC}}$ genutzt. Für realistische Werte $x_3 \in [-0,5; 0,5]$ liegt der relative Fehler dieser Näherung unter 3%. Außerdem kann die Berechnung in Echtzeit auf einem digitalen Signalprozessor (DSP) parallel zur FPGA-Berechnung der Stellgrößen ausgeführt werden.

3 Entwurf des MPC

Das Problem der Reduzierung des Emittanzanstiegs kann nun als folgende Regelungsaufgabe konkretisiert werden: Stabilisiere die Momente des Strahls (4) und (5), welche die Ausgangsgrößen des nichtlinearen Systems (1) sind, an der nicht exakt bekannten Ruhelage (7) unter Einhaltung der Stellbegrenzungen (2). Zusätzlich ist zu beachten, dass die typische Abtastzeit für das betrachtete Regelsystem des Synchrotrons SIS18 in der Größenordnung von 2–10 μs liegt. In der vorliegenden Arbeit wird $T_{\text{samp}} = 2.66 \mu\text{s}$ angenommen, dies entspricht einer Abtastrate von 375 kHz.

Zur Vereinfachung des Reglerentwurfs wird folgende Annahme getroffen:

Annahme 1 (Systemmatrizen unabhängig von der Ruhelage) Die Abhängigkeit der Systemmatrizen A_1 , A_2 , b_1 , b_2 von der unbekanntem Ruhelage $\bar{\mu}_\varphi$ kann vernachlässigt werden, d.h. es wird in (9c) und (10) $\bar{\mu}_\varphi = 1$ gesetzt.

³In den Vorgängerarbeiten [9, 11] wurde die vereinfachende Annahme getroffen, dass die Größen K_{FCT} und I_{DC} messtechnisch zur Verfügung stehen. Das Vorgehen in diesem Beitrag kommt ohne diese Vereinfachung aus. Beide Wege unterscheiden sich letztlich auch nur in der physikalischen Bedeutung der Offsetgröße in Ausgangsgleichung (12b). In [9, 11] kann der Offset direkt als Arbeitspunkt $\bar{\mu}_\varphi$ interpretiert werden, in dieser Arbeit ist der Offset ein Messfehler, der von der unbekanntem Ruhelage abhängt.

Wie zuvor diskutiert, erlauben die zur Verfügung stehenden Sensordaten keine direkte Berechnung der Ruhelage $\bar{\mu}_\varphi$. Gleichzeitig hängen die Systemmatrizen in (9) von dieser Ruhelage ab.

Der Einfluss der unbekanntenen Ruhelage auf die Eigenwerte von $A = \text{diag}(A_1, A_2)$ wurde in [7] eingehend untersucht. Diese Ergebnisse⁴ und die Simulationsergebnisse in Abschnitt 4 begründen Annahme 1.

3.1 Berücksichtigung der Störgröße und Zustandsschätzung

In Messgleichung (12b) tritt ein unbekannter additiver Messfehler auf, dies muss beim Entwurf des MPC berücksichtigt werden. Zur Berücksichtigung des unbekanntenen additiven Messfehlers wird im Folgenden ein sogenannter *offset-free MPC* Ansatz [12, 13] gewählt. Unter der Annahme, dass sich $\bar{\mu}_\varphi$ im Vergleich zur Dynamik (11) nur langsam ändert, kann der Messfehler in (12b) als unbekannte konstante Störung $d(k) \in \mathbb{R}$ modelliert werden. Dies führt auf die erweiterte Systembeschreibung

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ d(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B_d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ d(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u(k) \quad (13a)$$

$$y(k) = (C, C_d) \begin{pmatrix} x(k - \delta_m) \\ d(k - \delta_m) \end{pmatrix} + Du(k - \delta_m) \quad (13b)$$

mit $B_d = 0$. Wir nehmen zunächst an, dass keine Messverzögerung vorhanden ist, d.h. $\delta_m = 0$. Es kann gezeigt werden, dass das erweiterte System (13) genau dann beobachtbar ist, wenn

$$\text{rank} \begin{pmatrix} A - I & B_d \\ C & C_d \end{pmatrix} = n_x + n_d \quad (14)$$

gilt [12, 13], wobei n_x die Dimension von $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ und n_d die Dimension von $d \in \mathbb{R}^{n_d}$ ist. Da $B_d = 0$ ist, beeinflusst Störung d den zeitlichen Verlauf der Zustände nicht. Die Erfüllung der Rangbedingung (14) lässt sich daher leicht verifizieren. Die Störgröße kann, vorausgesetzt Annahme 1 hält, aus den Messgrößen (12a) und (12b) geschätzt werden. Es lässt sich zeigen, dass dies auch dann gilt, wenn eine Messverzögerung $\delta_m > 0$ vorhanden ist [9].

Im Folgenden wird zur Vereinfachung der Notation $z(k) = (x(k), d(k))^T$ verwendet. Außerdem werden die Systemmatrizen von (13a) mit $\bar{A} \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$, $\bar{B} := (B, 0)^T \in \mathbb{R}^{5 \times 2}$ und $\bar{C} := (C, C_d)^T \in \mathbb{R}^{2 \times 5}$ bezeichnet. Geschätzte Zustände werden mit einem hochgestellten $\hat{\cdot}$ gekennzeichnet. Für die Zustandsschätzung für (13) wird ein stationäres Kalman-Filter gewählt [14]. Für $\delta_m = 0$ lauten die Beobachtergleichungen zur Berechnung der Schätzung $\hat{z}(k)$

$$\begin{aligned} z_p(k) &= \bar{A}\hat{z}(k-1) + \bar{B}u(k-1), \\ y_p(k) &= \bar{C}z_p(k) + Du(k), \\ \hat{z}(k) &= z_p(k) + \bar{L}(y(k) - y_p(k)). \end{aligned}$$

Man beachte, dass die konstante Beobachterverstärkung \bar{L} vorab berechnet werden kann.

3.2 Optimierungsbasierte Prädiktion

Prädiktive Regelung basiert auf der wiederholten Lösung eines Optimalsteuerungsproblems über einen gleitenden Horizont. Für die hier betrachtete Regelungsaufgabe wird das folgende zeitdiskrete Optimalsteuerungsproblem verwendet:

$$\min_{\{u(i)\}} \frac{1}{2} \|z(N)\|_P^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \|z(i)\|_Q^2 + \|u(i)\|_R^2 \quad (15a)$$

unter den Nebenbedingungen $\forall i = 0, \dots, N-1$

$$z(i+1) = \bar{A}z(i) + \bar{B}u(i), \quad (15b)$$

$$z(0) = \hat{z}(k) = (\hat{x}(k), \hat{d}(k))^T, \quad (15c)$$

$$u_1(i) \in [-\bar{u}_1, \bar{u}_1], \quad u_2(i) \in [-\bar{u}_2, \bar{u}_2]. \quad (15d)$$

⁴Die Eigenwerte des zeitkontinuierlichen Systems sind rein imaginär. Die Imaginärteile der Eigenwerte weichen für realistische Werte der Ruhelage $\bar{\mu}_\varphi \in [0,5; 1,5]$ maximal um $\pm 10\%$ vom nominalen Fall $\bar{\mu}_\varphi = 1$ ab.

Wie im Kontext prädiktiver Regelung üblich, wird (15) zu jedem Abtastschritt k gelöst und das erste Element der Stellgrößenfolge $\{u(i)\}$ angewendet.⁵ Diese Formulierung ist ein übliches offset-free MPC⁶ mit einer quadratischen Kostenfunktion unter Berücksichtigung der erweiterten Dynamik (13). Das Optimierungsproblem (15) kann als quadratisches Programm (QP)

$$\min_{\nu} J(\nu) = \frac{1}{2}\nu^T H \nu + \nu^T F \hat{x}(k) + c \quad (16a)$$

$$\text{u.d.N. } \nu \in \mathcal{U}^N \quad (16b)$$

formuliert werden, wobei $\nu = (u(0)^T, u(1)^T, \dots, u(N-1)^T)^T \in \mathbb{R}^{n_u N}$ der Vektor der Stellgrößen über den Prädiktionshorizont ist und $\mathcal{U}^N \subset \mathbb{R}^{n_u N}$ die entsprechende Formulierung der Stellgrößenbeschränkung (15d) im $\mathbb{R}^{n_u N}$ bezeichnet. Für die Berechnung der Hesse-Matrix $H \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ und der Matrix $F \in \mathbb{R}^{n_u N \times n_x}$ verweisen wir auf [12, 15]. Es ist weiterhin bekannt, dass für $Q \succeq 0$ und $R \succ 0$ dieses QP strikt konvex ist und daher für $\mathcal{U}^N \neq \emptyset$ eine eindeutige optimale Lösung ν^* besitzt.

Es ist gerechtfertigt an dieser Stelle nach Stabilitätsgarantien für den vorgeschlagenen MPC-Regler zu fragen. Oft wird die Stabilität von MPC-Reglern durch die Berücksichtigung spezieller Endbeschränkungen und Endgewichte garantiert [12, 15]. Alternativ kann für den Fall von reinen Stellgrößenbeschränkungen gezeigt werden, dass unter speziellen Annahmen der MPC-Regler auch ohne stabilisierendes Endgewicht oder Endbeschränkungen lokal stabilisierend ist [16]. Dies gilt für den nominellen Fall, d.h. unter den Annahmen exakter Zustandsinformation $\hat{x}(k)$ ohne Mess- oder Beobachterfehler und einem exakten Reglerentwurfsmodell welches der Strecke entspricht. Weiterhin ist anzumerken, dass die Berücksichtigung von Beobachtern bezüglich der Stabilität von MPC-Reglern eine noch teilweise offene Forschungsfrage ist [17]. Daher verzichten wir an dieser Stelle aus Platzgründen auf eine detaillierte Analyse.

3.3 FPGA-basierte Implementierung des MPC

Im Allgemeinen existieren zwei Möglichkeiten für die Implementierung eines linear-quadratischen MPC. Bei expliziten MPC-Strategien (engl. explicit MPC) werden viele lokal optimale Regelgesetze im Vorfeld berechnet und zur Laufzeit des Reglers angewendet [18, 19]. Die zweite Möglichkeit ist online MPC, d.h. MPC basierend auf der Lösung des Optimierungsproblems zur Laufzeit des Reglers, vgl. [20–22]. Der große Nachteil von expliziten MPC-Schemata ist, dass die Anzahl der zu speichernden Regionen drastisch mit der Anzahl von Zuständen und der Länge des Prädiktionshorizonts [18] zunimmt. Da, wie in Abschnitt 4 gezeigt wird, die Stabilisierung der longitudinalen Strahldynamik vergleichsweise lange Prädiktionshorizonte erfordert, konzentrieren wir uns hier auf online MPC.

In dieser Arbeit nutzen wir Nesterovs Gradientenmethode [23] zur Lösung des QPs, da in (16) nur konvexe Beschränkungen der Stellsignale und keine Beschränkungen der Zustandsgrößen auftreten. Nesterovs Gradientenmethode wird in der Literatur auch als schnelle Gradientenmethode (engl. fast gradient method, FGM) bezeichnet. Die Verwendung der FGM zur effizienten Implementierung von MPC wird unter anderem in [20, 21] diskutiert. Die FGM kann wie folgt zusammengefasst werden:

Algorithmus 1 : Schnelle Gradientenmethode

Eingabe: Zustand $\hat{x}(k)$, Startwert $\nu^0 \in \mathcal{U}^N$, die Konstanten i_{\max} , L , c und die Matrizen H , F .

Setze $\nu^i = \nu^0$, $\omega = \nu^0$

for $i = 0 \rightarrow i_{\max} - 1$ **do**

Berechne $\eta(\omega) = (I - \frac{1}{L}H)\omega + \frac{1}{L}F\hat{x}(k)$

Berechne $\nu^{i+1} = P_U(\eta(\omega))$

Berechne $\omega = \nu^{i+1} + c(\nu^{i+1} - \nu^i)$

Setze $\nu^i = \nu^{i+1}$

end for

return ν^i

Die Konstanten werden wie folgt berechnet: $L, l > 0$ sind der größte und kleinste Eigenwert von H , und c ist

$$c = \frac{\sqrt{L} - \sqrt{l}}{\sqrt{L} + \sqrt{l}}. \quad (17)$$

Die Projektion auf die zulässige Menge $P_U : \nu \in \mathbb{R}^{n_u N} \rightarrow \mathcal{U}^N \subseteq \mathbb{R}^{n_u N}$ gestaltet sich extrem einfach (elementweise Sättigungsfunktionen), wenn die Stellgrößenbeschränkungen als Hyperquader dargestellt werden können [20, 21].

⁵Im Falle von nicht vernachlässigbaren Rechenzeiten zur Lösung von (15) können die dadurch bedingten Verzögerungen ohne Probleme durch Anwendungen des zeitlich verschobenen Stellsignals $\{u(i)\}$ berücksichtigt werden [9].

⁶Man beachte, dass die Grundidee des offset-free MPC ähnlich zu bekannten Verfahren der Störgrößenschätzung ist. Ein wichtiger Unterschied zur typischen Störgrößenschätzung ist jedoch, dass für den Fall $B_d \neq 0$ zwingend das erweiterte Systemmodell (13) zur Prädiktion zukünftigen Systemverhaltens zu berücksichtigen ist [12, 13].

Da zur Laufzeit der FGM nur Multiplikationen und Additionen von Vektoren und Matrizen ausgeführt werden müssen, ist der Rechenaufwand der FGM prinzipiell niedrig. Darüber hinaus erlaubt die FGM die Angabe einer oberen Schranke der Anzahl von Iterationen i_{\max} , die notwendig sind, um eine gewünschte Suboptimalitätsschranke einzuhalten, [24]. Dies bedeutet, dass das Ergebnis ν^i nach der letzten Iteration $i = i_{\max}$ nur suboptimal ist, d.h.

$$J(\nu^{i_{\max}}) - J(\nu^*) \leq \epsilon \quad (18)$$

wobei $\epsilon > 0$ die Suboptimalität beschreibt und ν^* die eindeutige optimale Lösung von (16) ist.

Neben ihrer einfachen Struktur ist ein weiterer Vorteil der FGM, dass für den Fall eines Kaltstarts explizit die Anzahl an Iterationen, die hinreichend sind, um eine gewünschte Suboptimalitätsschranke einzuhalten, angegeben werden kann. In [20] wird eine bekanntermaßen konservative Schranke für die Anzahl der benötigten Iterationen angeben als

$$i_{\max} = \min \left\{ \left\lceil \frac{\ln 2\epsilon - \ln(L\Delta^2)}{\ln\left(1 - \sqrt{\frac{l}{L}}\right)} \right\rceil, \left\lceil \sqrt{\frac{2L\Delta^2}{\epsilon}} - 2 \right\rceil \right\}, \quad (19)$$

dabei kennzeichnet $\lceil \cdot \rceil$ das Aufrunden auf die nächste ganze Zahl und die Anfangsschätzung für den Kaltstart ist $\nu^0 = (0, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n_u N}$. Für die symmetrischen Stellbegrenzungen (2) gilt

$$\Delta = N \sum_{i=1}^{n_u} \bar{u}_i^2. \quad (20)$$

Die verbleibende Frage ist nun, ob Algorithmus 1 ausreichend schnell berechnet werden kann, um die benötigte Abtastzeit von $2,66 \mu\text{s}$ einzuhalten. Für die Strahlregelung im Synchrotron SIS18 wurde eine maßgeschneiderte Hardware entwickelt [25], welche digitale Signalprozessoren (DSP) und einen programmierbaren Logikbaustein (field programmable gate array, FPGA) umfasst. Das bisher verwendete FIR-Filter (vgl. [3, 7]) ist auf einem DSP implementiert und reizt dessen Kapazitäten fast vollständig aus. Daher ist nicht zu erwarten, dass der DSP eine passende Plattform für die vorgeschlagene FGM ist. In der kommenden Hardwaregeneration, die für SIS18 verwendet werden soll, wird jedoch ein High-End-FPGA zum Einsatz kommen, auf dem eine maßgeschneiderte Implementierung von Algorithmus 1 möglich wäre. Daher wurde Algorithmus 1 in einer Hardwarebeschreibungssprache, VHDL, implementiert und Zeitanalysen durchgeführt mit dem TimeQuest Timing Analyzer, welcher als Teil der Designtools der Altera Entwicklungsumgebung zur Verfügung steht [26]. Die Implementierung wurde so durchgeführt, dass ein Iterationsschritt der FGM pro Taktzyklus des FPGA ausgeführt wird. Die vollständige Parallelisierung führt zu einer hohen Auslastung der Ressourcen des FPGA.

Eine vorläufige Zeitanalyse der VHDL-Implementierung ohne Berücksichtigung des Kalman-Filters⁷ wurde für den FPGA Stratix V von Altera durchgeführt. In [11] wurde gezeigt, dass für eine Horizontlänge $N = 30$ und eine spezifische Wahl der Gewichtungsmatrizen bis zu 33 FGM-Iterationen nötig sind, um eine Fehlerschranke $\epsilon = 10^{-6}$ zu gewährleisten. Da die Implementierung auf Fixpunktoperationen basiert, wurde eine ausführliche Analyse nach [27] durchgeführt, um die Anwendbarkeit der FGM sicherzustellen.

Die Zeitanalyse ergab, dass für das vorliegende System und eine Horizontlänge $N = 30$ bis zu 33 Iterationen in einer Abtastzeit von etwa $1 \mu\text{s}$ realisiert werden können [11]. Dies liegt deutlich unter den geforderten $2,66 \mu\text{s}$.

4 Simulationsergebnisse

Um die Auswirkung der Regelung auf die Emittanz beurteilen zu können, wurden Simulationen analog zu den in Abschnitt 2 beschriebenen für die FGM und für die bestehende FIR-Regelung durchgeführt. Unkorreliertes weißes Rauschen wurde zu den Sensordaten addiert, so dass die Rauscheigenschaften vergleichbar sind mit Messdaten des Synchrotrons SIS18. Für die Stellbegrenzungen (2) gilt $\bar{u}_1 = 0,5$, $\bar{u}_2 = 0,1$.

Die Reglerparameter⁸ lauten wie folgt: Als Prädiktionshorizont wurde $N = 30$ festgelegt, die heuristisch ermittelten Gewichtungsmatrizen lauten $Q = P = \text{diag}(2, 8, 2, 8, 0)$, $R = \text{diag}(0,9, 0,9)$. Die Störung $d(k)$ wird im Gütefunktional nicht berücksichtigt, da sie als Zustand von (13) nicht steuerbar ist. Die Anfangsbedingungen für den Beobachter wurden zu $(\hat{x}(0), \hat{d}(0))^T = (0, 0, 0, 0, 0)^T$ gewählt. Die Regelung ist aktiv ab $k = 20$. Das Optimierungsproblem (15) wurde mit einer Matlab-Implementierung der FGM mit 19 Iterationen gelöst.⁹

⁷Für die Analyse wurde das System (11) ohne Störgröße betrachtet. Die Analyse ist trotzdem gültig, da die Störgröße d nicht die Dynamik der Zustände x beeinflusst, da $B_d = 0$ gilt. Die Störgröße ist nur ein Offset des Ausgangs y .

⁸Die Parameter weichen von den in [11] verwendeten ab, da in der vorliegenden Arbeit für die Simulationen das erweiterte System (13) mit Kalman-Filter zugrunde gelegt wurde.

⁹Für das erweiterte System (13) mit den genannten Parametern der Regelung garantieren 19 Iterationen nach (19) eine Fehlerschranke von $\epsilon = 10^{-6}$. Dabei sind $L = 2,3350$, $l = 0,9005$, $\Delta = 7,8$ und $c = 0,2334$.

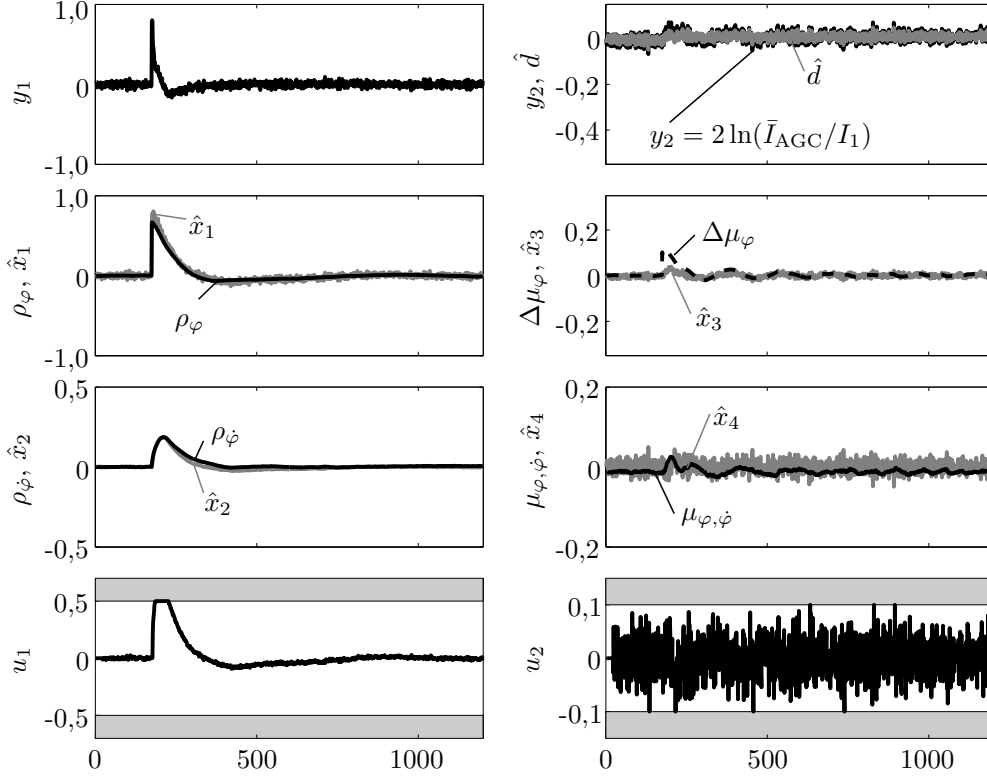


Abbildung 5: Geregelt System mit Phasenstörung (grau: Schätzwerte der Zustände).

Abbildungen 5 und 6 stellen die Ergebnisse für die Störungen der Phase bzw. der Amplitude dar. Messtechnisch zur Verfügung stehen nur die Werte y_1 und y_2 , diese werden für die Berechnung der Schätzung des Kalman-Filters herangezogen. Um die Güte der Zustandsschätzung bewerten zu können, wurden zusätzlich die Vergleichsgrößen ρ_φ , $\rho_{\dot{\varphi}}$ und $\mu_{\varphi, \dot{\varphi}}$ nach (4) und (5) berechnet. In der Simulation ist dies möglich, da die volle Information $(\varphi_j, \dot{\varphi}_j)$ aller Teilchen des Strahls vorliegt. Die Abweichung von der Ruhelage $x_3 = \Delta\mu_\varphi = \mu_\varphi - \bar{\mu}_\varphi$ kann aus μ_φ nur mit einer zusätzlichen Annahme ermittelt werden: Es wird angenommen, dass der Arbeitspunkt $\bar{\mu}_\varphi$ sich zum Zeitpunkt der Störung sprunghaft ändert. Dies folgt aus den Überlegungen zur Amplitudenstörung in Abschnitt 2.2.

Für die AGC wurde angenommen, dass diese deutlich langsamer arbeitet als die simulierte Zeitspanne von wenigen Millisekunden. Daher wurde für $k = 1$ der Pegel mit $\bar{I}_{AGC} = I_1(k = 1)$ initialisiert und danach konstant gehalten. Dadurch ergibt sich zunächst eine Störung von $d \approx 0$. Nach der Amplitudenstörung bei $k = 175$ in Abb. 6 ändert sich der Arbeitspunkt $\bar{\mu}_\varphi$ bzw. \bar{I}_1 . Da \bar{I}_{AGC} konstant gehalten wird, stellt sich somit eine Störung $d \neq 0$ ein.

Die Emittanzverläufe beider betrachteten Störungen sind in Abb. 7 für das unregelte System, für das mit einem gegenwärtig auf der realen Anlage verwendeten FIR-Filter geregelte System und für den vorgeschlagenen MPC-Regler dargestellt. Für beide Störungen kann die normierte Emittanz durch die Regelung deutlich verringert und damit eine höhere Strahlqualität erreicht werden. Im Vergleich zur existierenden FIR-Implementierung erreicht das MPC einer deutliche bessere Reduktion des Emittanzanstiegs. Die durch das MPC in den Simulationen erreichte Emittanzreduktion ist aus experimentalphysikalischer Sicht als sehr vielversprechend zu bewerten.

5 Zusammenfassung

In diesem Beitrag wurde ein Ansatz zur modellprädiktiven Regelung der longitudinalen Strahldynamik in Synchrotrons vorgestellt. Der vorgeschlagene MPC-Regler nutzt eine schnelle Gradientenmethode für die Optimierung und berücksichtigt die wichtigsten praktischen Erfordernisse der Regelungshardware des Synchrotrons SIS18 der GSI. Eine Implementierung in VHDL und erste Ergebnisse einer Laufzeitanalyse zeigen, dass mit einem High-End-FPGA wie dem Stratix V von Altera Abtastzeiten von etwa einer Mikrosekunde möglich sind, d.h. der vorgeschlagene MPC-Regler ist prinzipiell für das SIS18 implementierbar.

Aufbauend auf dieser Arbeit wird eine Laufzeitanalyse für das Gesamtsystem inklusive Kalman-Filter durchgeführt werden, um damit die Grundlage für eine erfolgreiche praktische Realisierung der Regelung für das Syn-

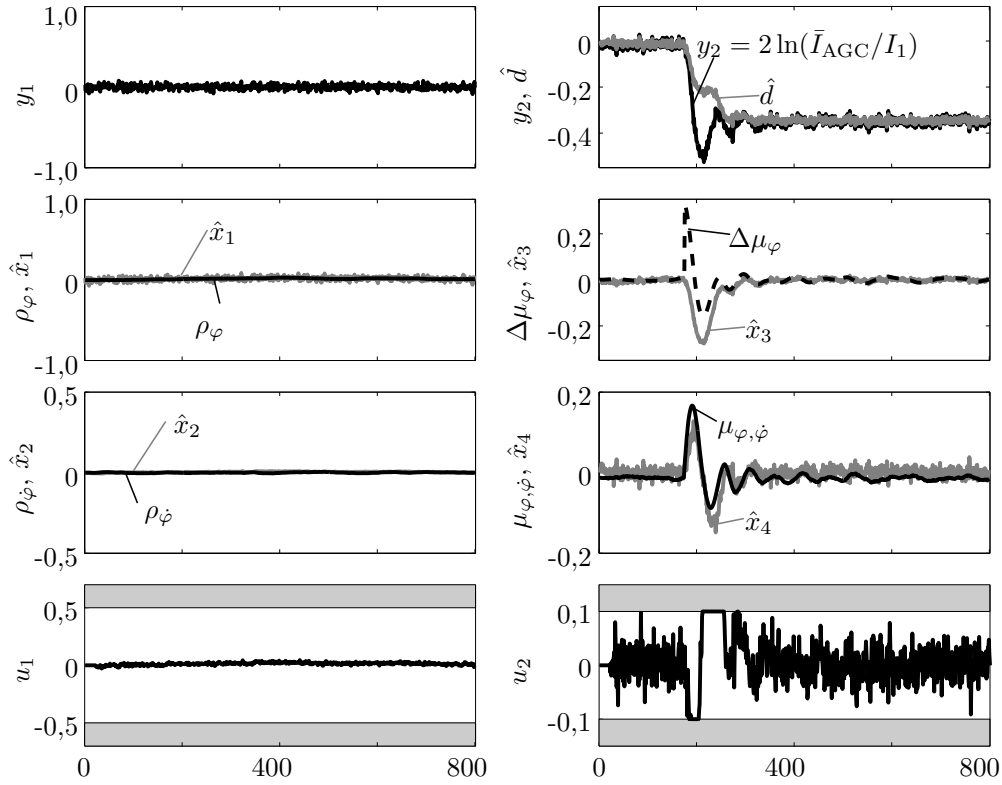


Abbildung 6: Geregelt System mit Amplitudenstörung (grau: Schätzwerte der Zustände).

chrotron SIS18 zu legen. Darüber hinaus sollen sich zukünftige Arbeiten damit beschäftigen, wie der vorgestellte Ansatz auf den Fall eines beschleunigten Teilchenstrahls übertragen werden kann.

A Parameterwerte des SIS18

Tabelle 1: Parameterwerte

Parameter	Wert
Umlaufzeit des Strahls im Ring T_R	4,6629 μs
Harmonischenzahl h	8
Ionenladung Q	$2,8839 \cdot 10^{-18} \text{ C}$
relativistischer Lorentzfaktor γ_R	1,0122
relativistischer Lorentzfaktor β_R	0,1550
Transitionsfaktor γ_{tr}	5,45
Referenzenergie W_R	6,0349 nJ
Spannungsamplitude \hat{V}	5000 V

Literatur

¹GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung GmbH, Darmstadt, www.gsi.de.

²S. Ivanov und Q. Lebedev, „Analysis of the feedback-loop stability in the RF system of the U-70 synchrotron“, *Instruments and Experimental Techniques* **45**, 6–19 (2002).

³H. Klingbeil, B. Zipfel, M. Kumm und P. Moritz, „A digital beam-phase control system for heavy-ion synchrotrons“, *IEEE Trans. Nucl. Sci.* **54**, 2604–2610 (2007).

⁴H. Damerau, S. Hancock, M. Paoluzzi, M. Migliorati und L. Ventura, „Longitudinal coupled-bunch oscillation studies in the CERN PS“, in *Proc. of the International Particle Accelerator Conference (IPAC13)* (2013).

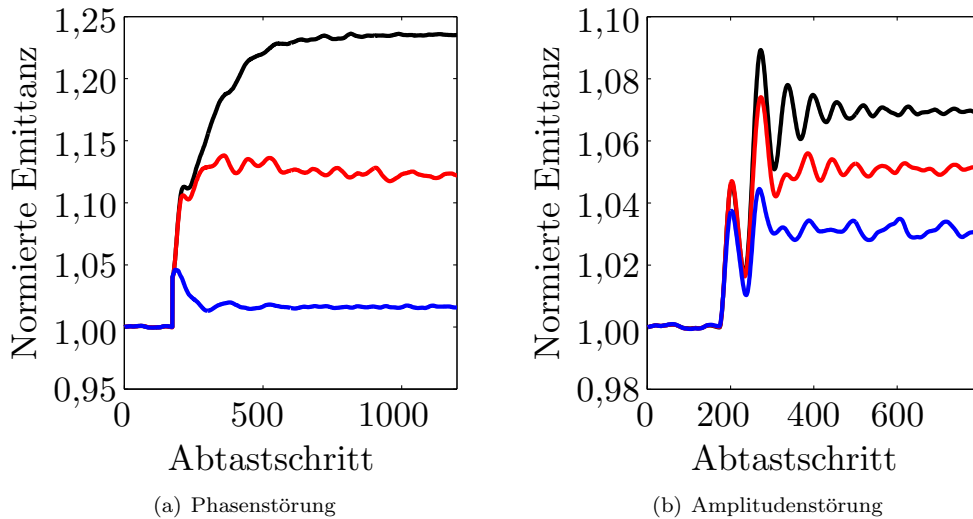


Abbildung 7: Normierte Emittanz für Phasen- und Amplitudenstörung: ungeregelt (schwarz), FIR-Regelung (rot), FGM (blau) .

- ⁵S. Gering, J. Grieser und A. Wahrburg, „Using LMIs to optimize robustness of observer-based state-feedback for a synchrotron“, *Int. J. Robust Nonlinear Control* **24**, 3454–3473 (2014).
- ⁶S. Lee, *Accelerator physics* (World Scientific Pub. Co., 2004).
- ⁷D. Lens und H. Klingbeil, „Stability of longitudinal bunch length feedback for heavy-ion synchrotrons“, *Phys. Rev. ST Accel. Beams* **16**, 032801 (2013).
- ⁸H. Klingbeil, U. Laier und D. Lens, *Theoretical foundations of synchrotron and storage ring rf systems* (Springer, 2015).
- ⁹T. Faulwasser, D. Lens und C. Kellett, „Offset-free output feedback predictive control for longitudinal beam dynamics in heavy ion synchrotrons“, in *Proc. of 2014 Australian Control Conference (AuCC)* (17.-18. Oktober 2014).
- ¹⁰P. Varutti, B. Kern, T. Faulwasser und R. Findeisen, „Event-based model predictive control for networked control systems“, in *Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference, CDC/CCC* (15.-18. Dezember 2009), S. 567–572.
- ¹¹T. Faulwasser, D. Lens und C. Kellett, „Predictive control for longitudinal beam dynamics in heavy ion synchrotrons“, in *Control Applications (CCA), 2014 IEEE International Conference on* (Aug. 2014), S. 1988–1995.
- ¹²J. Rawlings und D. Mayne, *Model predictive control: theory & design* (Nob Hill Publishing, Madison, WI, 2009).
- ¹³U. Maeder, F. Borrelli und M. Morari, „Linear offset-free model predictive control“, *Automatica* **45**, 2214–2222 (2009).
- ¹⁴B. Anderson und J. Moore, *Optimal filtering*, hrsg. von T. Kailath, Information and System Science (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1979).
- ¹⁵J. Maciejowski, *Predictive control: with constraints* (Pearson education, 2002).
- ¹⁶A. Jadbabaie und J. Hauser, „On the stability of receding horizon control with a general terminal cost“, *IEEE Trans. Automat. Contr.* **50**, 674–678 (2005).
- ¹⁷R. Findeisen, L. Imsland, F. Allgöwer und B. Foss, „State and output feedback nonlinear model predictive control: an overview“, *European Journal of Control* **9**, 190–206 (2003).
- ¹⁸A. Alessio und A. Bemporad, „A survey on explicit model predictive control“, in *Nonlinear model predictive control - towards new challenging applications*, Bd. 384, hrsg. von L. Magni, D. Raimondo und F. Allgöwer, *Lecture Notes in Control and Information Sciences* (Springer Berlin, 2009), S. 345–369.
- ¹⁹A. Bemporad, M. Morari, V. Dua und E. N. Pistikopoulos, „The explicit linear quadratic regulator for constrained systems“, *Automatica* **38**, 3–20 (2002).
- ²⁰M. Kögel und R. Findeisen, „A fast gradient method for embedded linear predictive control“, in *Proceedings of the 18th IFAC World Congress* (2011), S. 1362–1367.

- ²¹S. Richter, C. Jones und M. Morari, „Real-time input-constrained MPC using fast gradient methods“, in Proc. 48th IEEE Conference on Decision and Control and the 28th Chinese Control Conference, CDC/CCC (15.-18, Dezember 2009), S. 7387–7393.
- ²²A. Wills, G. Knagge und B. Ninness, „Fast linear model predictive control via custom integrated circuit architecture“, IEEE Trans. Control Syst. Technol. **20**, 59–71 (2012).
- ²³Y. Nesterov, „A method of solving a convex programming problem with convergence rate $O(1/k^2)$ “, Soviet Mathematics Doklady **27**, 372–376 (1983).
- ²⁴Y. Nesterov, *Introductory lectures on convex optimization: a basic course*, Bd. 87 (Springer, 2004).
- ²⁵H. Klingbeil, U. Laier, K.-P. Ningel, S. Schäfer, C. Thielmann und B. Zipfel, „New digital low-level RF system for heavy-ion synchrotrons“, Phys. Rev. ST Accel. Beams **14**, 102802 (2011).
- ²⁶*Quartus II handbook volume 3: verification*, Altera Corporation (15.12.2014).
- ²⁷J. Jerez, P. Goulart, S. Richter, G. Constantinides, E. Kerrigan und M. Morari, „Embedded predictive control on an FPGA using the fast gradient method“, in Proc. of the 2013 European Control Conference (2013), S. 3614–3620.